

大学数学のアトリエ | 線形代数 第3章 行列式

No.4 クラメルの公式

この回のゴール

- クラメルの公式を述べ、使って連立方程式を解ける。
- 列に関する多重線形性・交代性を使って、クラメルの公式を証明できる。
- 掃き出し法と比べたときの、クラメルの公式の長所と短所を説明できる。

■ 1. クラメルの公式

第1章 No.3 では、 A が正則なら $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ の解は $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ だった。これを行列式で書き直すと、解の各成分を**行列式の比**として直接表すことができる。

以下、 n 次正方行列 A を列ベクトルに分けて $A = (\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \cdots \ \mathbf{a}_n)$ と書く。

定理 1 クラメルの公式

A を n 次正則行列 ($\det A \neq 0$) とする。連立一次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ のただ 1 つの解は

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

で与えられる。ここで A_i は、 A の第 i 列を $\mathbf{b}$ で置き換えた行列

$$A_i = (\mathbf{a}_1 \ \cdots \ \mathbf{a}_{i-1} \ \mathbf{b} \ \mathbf{a}_{i+1} \ \cdots \ \mathbf{a}_n)$$

である。

例 1 2 元連立方程式

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases} \quad \text{では } \det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -5 \text{ で,}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{-5} = \frac{-8}{-5} = \frac{8}{5}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{-5} = \frac{-3}{-5} = \frac{3}{5}.$$

x を求めるときは x の係数の列 (第 1 列) を、 y を求めるときは第 2 列を、右辺 $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ に取り替える。

■ 2. 証明

【証明】 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ を列ベクトルで書くと

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b}$$

である ($A\mathbf{x}$ は「 A の列を x_j 倍して足したもの」). これを A_i の第 i 列に代入し, 列についての多重線形性 (No.2 定理 1・定理 2) を使うと

$$\det A_i = \det(\mathbf{a}_1 \cdots \underbrace{\sum_{j=1}^n x_j \mathbf{a}_j}_{\text{第 } i \text{ 列}} \cdots \mathbf{a}_n) = \sum_{j=1}^n x_j \det(\mathbf{a}_1 \cdots \underbrace{\mathbf{a}_j}_{\text{第 } i \text{ 列}} \cdots \mathbf{a}_n).$$

$j \neq i$ の項では, $\mathbf{a}_j$ が第 i 列と第 j 列の 2 か所に現れるので行列式は 0. 残るのは $j = i$ の項 $x_i \det A$ だけなので

$$\det A_i = x_i \det A.$$

$\det A \neq 0$ で割れば $x_i = \frac{\det A_i}{\det A}$.

□

コラム：余因子行列からも出てくる

$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} = \frac{1}{\det A} \tilde{A}\mathbf{b}$ なので, $x_i = \frac{1}{\det A} \sum_j \Delta_{ji} b_j$. この $\sum_j b_j \Delta_{ji}$ は, A_i を第 i 列で余因子展開した式そのもの (第 i 列を取り除いた小行列は A と A_i で同じ) なので $\det A_i$ に等しい. No.3 の結果からもクラメルの公式が得られる.

コラム：図形で見ると (2 次の場合)

$x\mathbf{a}_1 + y\mathbf{a}_2 = \mathbf{b}$ のとき, $\det(\mathbf{b} \ \mathbf{a}_2)$ は $\mathbf{b}$ と $\mathbf{a}_2$ が作る平行四辺形の向きつき面積. $\mathbf{b}$ のうち $\mathbf{a}_2$ 方向の成分は面積に効かない ($\mathbf{a}_2$ と平行なので) から, その向きつき面積は $x\mathbf{a}_1$ と $\mathbf{a}_2$ の作る向きつき面積, つまり $\det(\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2)$ の x 倍になる. 「 $x =$ 向きつき面積の比」というのがクラメルの公式の図形的な意味である. ($x < 0$ のときは 2 つの平行四辺形の向きが逆になる. ふつうの面積の比だけでは, x の符号までは分からない.)

■ 3. 3 元連立方程式

例題 1

クラメルの公式を用いて, 次の連立方程式を解け.

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x + 3y - z = 5 \\ x - y + 2z = 5 \end{cases}$$

【解答】 係数行列の行列式は

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -5 (\neq 0).$$

各列を右辺 $(6, 5, 5)$ で置き換えて

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & -1 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -5, \quad \det A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix} = -10, \quad \det A_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -15.$$

よって

$$x = \frac{-5}{-5} = 1, \quad y = \frac{-10}{-5} = 2, \quad z = \frac{-15}{-5} = 3.$$

第2章 No.1 例題1と同じ答えである.

クラメルの公式の長所と短所

- **短所** : n 元の方程式を解くのに $n+1$ 個の n 次行列式が必要で, n が大きいと計算量が多い. 数値を解くだけなら掃き出し法のほうが速い. また, $\det A = 0$ のとき (解が無数・解なし) には使えない.
- **長所** :
 - 未知数の **1 つだけ**を知りたいときは, 行列式2つで済む.
 - 解が係数の式として**明示的に**書ける. 文字を含む方程式や, 「係数が整数なら解はどうなるか」といった理論的な考察に向いている.

例題 2

$$a \neq \pm 1 \text{ のとき, 連立方程式 } \begin{cases} ax + y = 1 \\ x + ay = 2 \end{cases} \text{ を解け.}$$

【解答】 $\det A = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^2 - 1 \neq 0$ なので,

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & a \end{vmatrix}}{a^2 - 1} = \frac{a - 2}{a^2 - 1}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{a^2 - 1} = \frac{2a - 1}{a^2 - 1}.$$

練習問題

1. クラメルの公式を用いて解け.

$$(1) \begin{cases} 3x + 5y = 4 \\ x + 2y = 1 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} 2x + y - z = 2 \\ x - y + 2z = 5 \\ 3x + 2y + z = 5 \end{cases}$$

2. 連立方程式 $\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x + 5y + 3z = 0 \\ x + 3y + 3z = 0 \end{cases}$ の解のうち, z の値だけをクラメルの公式で求めよ.

3. クラメルの公式を用いて, 第1章 No.3 の2次正方行列の逆行列の公式を導け. (ヒント: A^{-1} の第1列は $A\mathbf{x} = {}^t(1, 0)$ の解, 第2列は $A\mathbf{x} = {}^t(0, 1)$ の解である.)

4. (考えてみよう) A の成分がすべて整数で, $\det A = \pm 1$ であるとする.

(1) $\mathbf{b}$ の成分がすべて整数なら, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ の解の成分もすべて整数であることを示せ.

(2) A^{-1} の成分もすべて整数であることを示せ.

■ 練習問題の解答

$$1. (1) \det A = 6 - 5 = 1. \quad x = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3, \quad y = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

(2)

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -10,$$

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -20, \quad \det A_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 10, \quad \det A_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -10.$$

よって $x = 2, y = -1, z = 1$ (第2章 No.1 練習問題 1 (1) と一致).

2. 係数行列は第1章 No.4 例題 2 の行列で, $\det A = 1$. 第3列を右辺で置き換えて

$$z = \frac{1}{1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1$$

(第3列で展開した). 実際, A^{-1} の第1列は ${}^t(6, -3, 1)$ なので, $\mathbf{x} = A^{-1}{}^t(1, 0, 0)$ の z 成分は 1 である.

$$3. A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, D = ad - bc \neq 0 \text{ とする. } A\mathbf{x} = {}^t(1, 0) \text{ の解は } x_1 = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{vmatrix} = \frac{d}{D}, \quad x_2 = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} a & 1 \\ c & 0 \end{vmatrix} = \frac{-c}{D}. \\ A\mathbf{x} = {}^t(0, 1) \text{ の解は } x_1 = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} 0 & b \\ 1 & d \end{vmatrix} = \frac{-b}{D}, \quad x_2 = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} a & 0 \\ c & 1 \end{vmatrix} = \frac{a}{D}. \text{ これらを列として並べると} \\ A^{-1} = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

4. (1) A_i の成分もすべて整数なので, $\det A_i$ は整数の積の和で整数. $x_i = \det A_i / (\pm 1) = \pm \det A_i$ は整数. (2) A^{-1} の第 j 列は, $A\mathbf{x} = \mathbf{e}_j$ (第 j 成分だけ 1 で他は 0 の列ベクトル) の解である. $\mathbf{e}_j$ の成分は整数なので, (1) より A^{-1} の第 j 列の成分は整数.

※ 逆に, 成分が整数の A で A^{-1} の成分も整数なら, $\det A \cdot \det A^{-1} = 1$ と, どちらも整数であることから $\det A = \pm 1$ となる.